

第3讲

第3讲：量子门与量子线路

牛温佳 教授

北京交通大学·网络空间安全学院

本讲内容

- 1 从数字逻辑门到量子门
- 2 量子门——酉变换
- 3 单量子比特门
- 4 多量子比特门与纠缠
- 5 变分量子线路 (VQC)
- 6 量子测量
- 7 思考题与小结

🎯 学习目标

了解量子门与经典逻辑门的核心区别

掌握几种基本量子门的作用

理解变分量子线路的基本结构

了解量子测量的基本原理与特性

从数字逻辑门到量子门

Section 3.1

经典逻辑门基础

计算机通过**逻辑门**处理比特信息：与门(AND)、或门(OR)、非门(NOT)

输入二进制（0或1），根据预定逻辑规则产生输出

例如：非门将 $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$ ；与门仅在两个输入均为1时输出1

经典逻辑门的核心特征：**不可逆**（如与非门，无法从输出反推输入）

现代CPU由数十亿个逻辑门构成，每个门消耗能量并产生热量

经典门 vs 量子门

与门 (AND)

0, 0 → 0
0, 1 → 0
1, 0 → 0
1, 1 → 1

Pauli-X

$|0\rangle \rightarrow |1\rangle, |1\rangle \rightarrow |0\rangle$

或门 (OR)

经典逻辑门
0, 0 → 0
1, 0 → 1
1, 1 → 1

Hadamard

量子门

$|0\rangle \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2}$

非门 (NOT)

0 → 1
1 → 0

CNOT

$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, |01\rangle \rightarrow |01\rangle$
 $|10\rangle \rightarrow |11\rangle, |11\rangle \rightarrow |10\rangle$

左：经典逻辑门 · 右：量子门

量子门——酉变换

Section 3.1.2

量子门的数学基础

量子门是操作量子比特的基本单元，满足**酉变换**要求

酉变换 (Unitary Transformation) : $U^\dagger U = I$, 即变换的共轭转置等于其逆

所有量子门操作都是**可逆的** (除测量外) ——这是与经典门最根本的区别

量子门在数学上表示为**酉矩阵**, 作用在量子态向量上

$U|\psi\rangle \rightarrow$ 新的量子态; 由于酉性, 状态向量长度 (范数) 保持不变

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I$$

酉矩阵满足 $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ ，即变换矩阵的共轭转置等于其逆矩阵。这意味着量子门操作可以完美逆转，不丢失任何信息。

可逆性 → 量子计算的信息论优势

单量子比特门

Section 3.1.2

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pauli-X 门是量子版本的「非门」： $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ ， $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ 。在布洛赫球上，相当于绕 x 轴旋转 180° 。

矩阵表示： $X = [[0,1],[1,0]]$

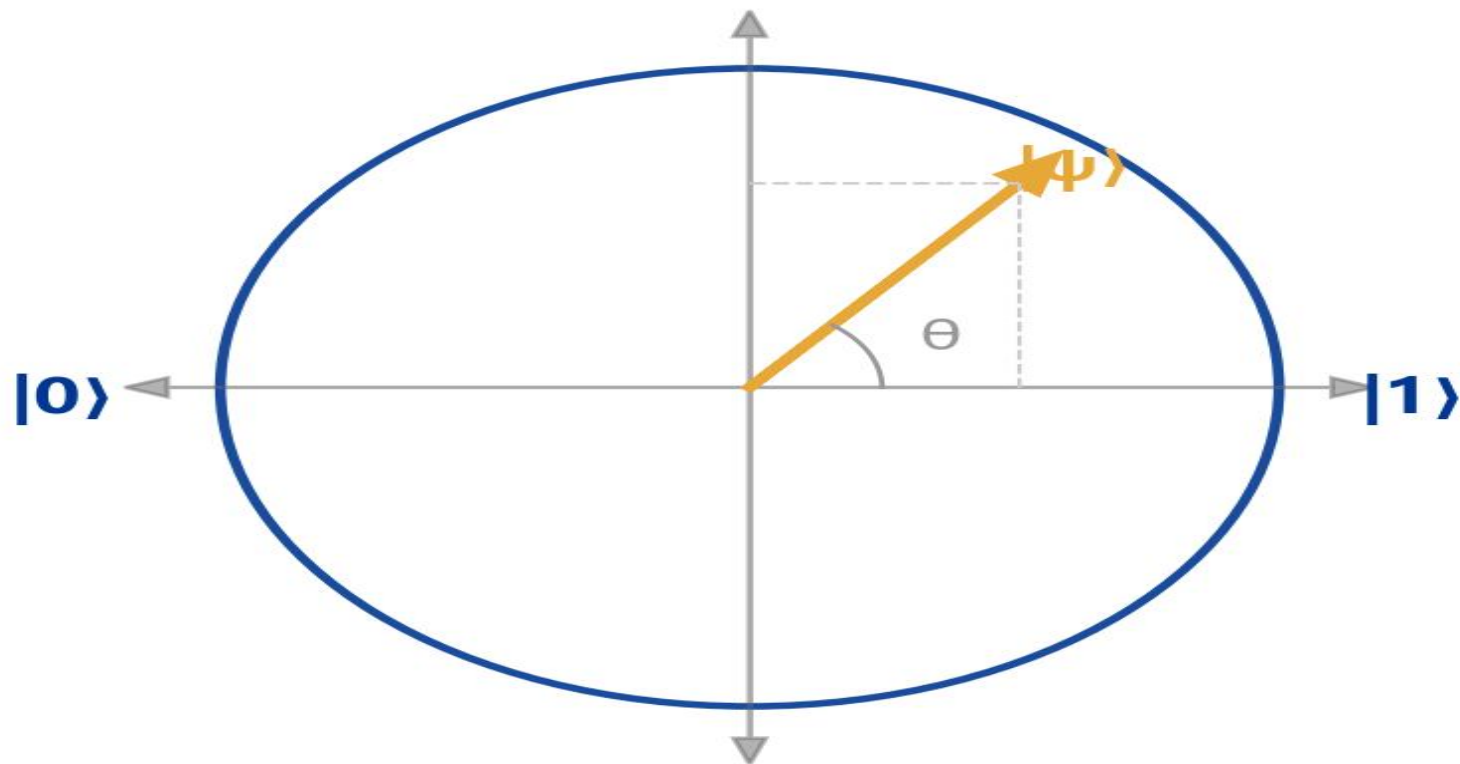
Hadamard 门 (H门)

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

H门是最重要的量子门之一： $|0\rangle \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ （等概率叠加态）。在布洛赫球上，H门将 $|0\rangle$ 旋转到x轴正方向。

$$H|0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \cdot H|1\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$$

布洛赫球 — 量子比特状态表示



量子态 $|\psi\rangle$ 在布洛赫球上的几何表示

旋转门：RX, RY, RZ

$$R_X(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}X}$$

旋转门在布洛赫球面上绕指定轴旋转量子比特。RX绕X轴、RY绕Y轴、RZ绕Z轴旋转。参数 θ 决定旋转角度，是变分量子线路中的可训练参数。

$$R_X(\theta) |0\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle - i\sin(\theta/2)|1\rangle$$

多量子比特门与量子纠缠

Section 3.2

CNOT 门——纠缠的基石

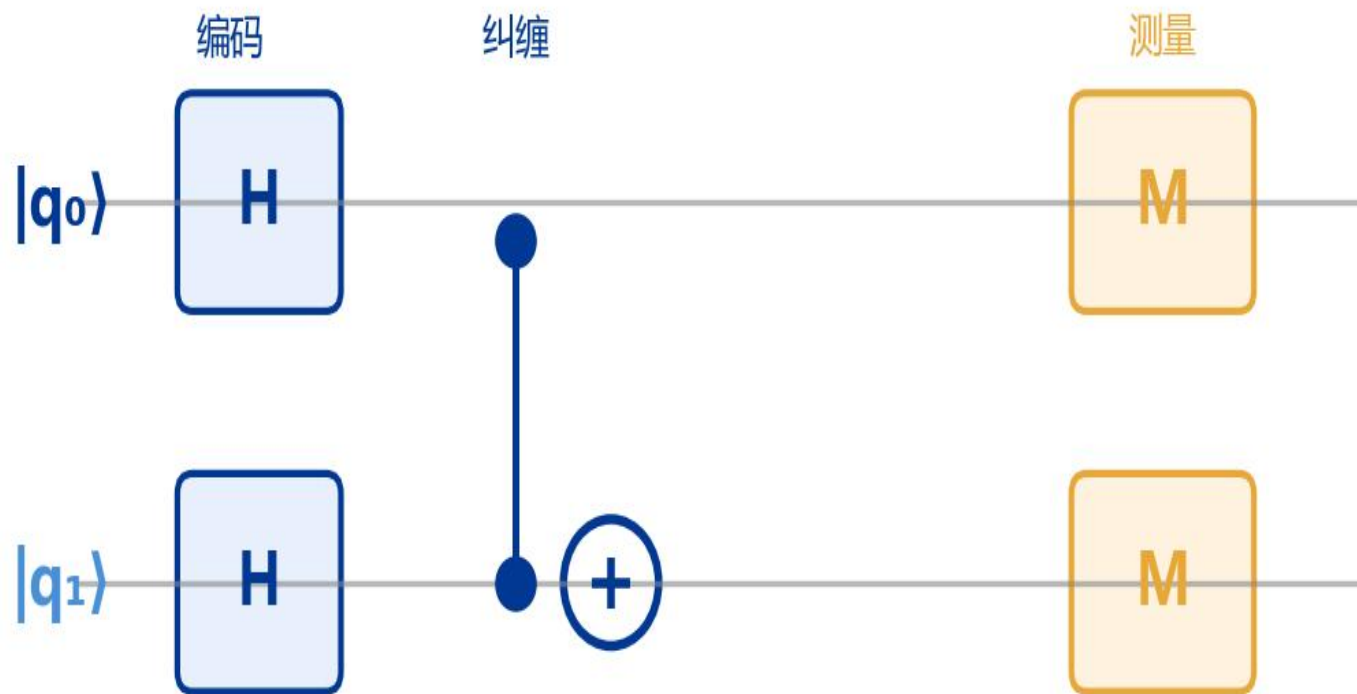
$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

CNOT门有两个输入：控制量子比特和目标量子比特。若控制为 $|1\rangle$ ，则翻转目标；否则不变。
CNOT是构建量子纠缠的核心操作。

$|00\rangle \rightarrow |00\rangle \cdot |01\rangle \rightarrow |01\rangle \cdot |10\rangle \rightarrow |11\rangle \cdot |11\rangle \rightarrow |10\rangle$

量子线路示例：Bell态制备

量子线路示意图



H门创建叠加 → CNOT门产生纠缠 → 测量

CZ 门 (受控Z门)

类似CNOT, 但在控制量子比特为 $|1\rangle$ 时施加Z操作而非X操作

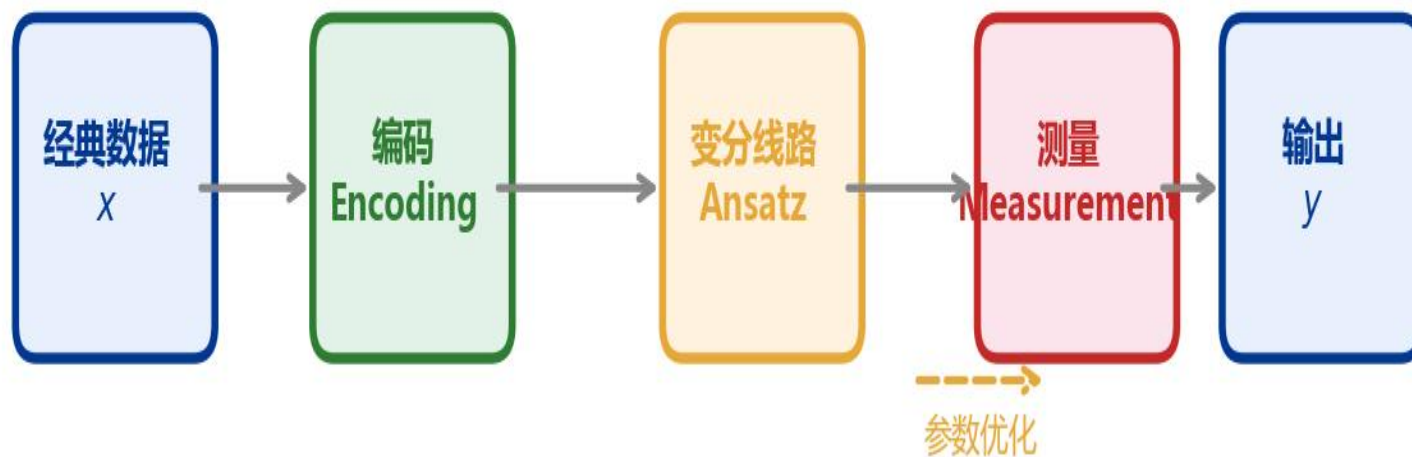
CZ门的矩阵表示: $\text{diag}(1, 1, 1, -1)$ — 仅当两个量子比特均为 $|1\rangle$ 时, 符号翻转

CZ门在量子纠错和量子隐态传输中有重要应用

变分量子线路 (VQC)

Section 3.3 — 量子机器学习的基础

变分量子线路 (VQC) 基本流程



数据编码 → 变分线路 (可训练) → 测量输出

第一步：数据编码 (Encoding)

将经典数据转换（嵌入）到量子态空间中

基编码：经典二进制数据直接映射到对应的计算基态

角度编码：将数据值作为量子门旋转角度： $RX(\theta)$, $RY(\theta)$, $RZ(\theta)$

振幅编码：最有效率的方式—— n 个量子比特可编码 2^n 个数据

编码方式的选择直接影响模型的表达能力和训练效率

三种编码方式对比

编码方式	描述	量子比特效率	适用场景
基编码	二进制→基态	$n \rightarrow n$	离散数据/分类
角度编码	数据→旋转角	$n \rightarrow n$	连续值/小规模
振幅编码	数据→振幅	$n \rightarrow 2^n$	大规模数据

第二步：变分量子线路 (Ansatz)

Ansatz 是量子线路中的**可训练部分**，由含参数的量子门组成

参数 θ 类比于经典神经网络中的**权重和偏置**

线路结构设计 (拟设/Ansatz) 直接影响算法性能和表达能力

常见的Ansatz结构：层级结构 (Layer-by-Layer)、纠缠块 (Entangling Blocks)

Ang Ansatz最简单的形式：RY层 + CNOT纠缠层 交替堆叠

VQC训练流程

1. 初始化参数 θ (通常随机或零初始化)
2. 对每个训练样本: 编码 \rightarrow 前向量子线路 \rightarrow 测量得输出
3. 计算损失函数 (如均方误差、交叉熵)
4. 通过**参数偏移法则** (Parameter Shift Rule) 计算梯度
5. 梯度下降更新参数: $\theta \leftarrow \theta - \eta \cdot \nabla L$
6. 重复直至收敛 — 这就是量子机器学习的训练范式

量子梯度计算：参数偏移法则

$$\frac{\partial \langle B \rangle}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left(\langle B \rangle_{\theta + \frac{\pi}{2}} - \langle B \rangle_{\theta - \frac{\pi}{2}} \right)$$

由于量子线路的酉性，无法直接使用经典的反向传播。参数偏移法则通过两次前向传播（偏移 $\pm\pi/2$ ）来计算梯度，这是量子机器学习的核心技巧。

第三步：测量 (Measurement) ——量子→经典

从量子态中提取经典信息——连接量子世界与经典世界的桥梁

投影测量：在某个方向上的投影，结果为离散的 ($|0\rangle$ 或 $|1\rangle$)

期望值估计：计算泡利算符 $\langle Z \rangle$ 等期望值，得到连续数值

采样测量：多次运行线路，统计各结果的频率分布

量子测量的独特性

测量**坍缩**量子态：测量后状态变为测量结果对应的确定状态

非正交态无法完美区分 — 量子态区分问题的根本限制

本质**概率性**：相同初始态，多次测量得到不同结果的分布

测量不可逆：坍缩后叠加信息永久丢失

不确定性原理：某些物理量（如位置和动量）无法同时精确测量

思考题与小结

1. 为什么量子门必须是可逆的（酉变换）？经典逻辑门中的「与非门」是可逆的吗？
2. 变分量子线路为什么特别适合在现有量子计算机上运行？
3. 量子测量会破坏量子态的叠加，你能想出在测量后继续利用量子态的方法吗？
4. H门 + CNOT门组合为什么能产生量子纠缠？

本讲小结

- ✓ 量子门是酉变换（可逆），区别于经典逻辑门（不可逆）
- ✓ Pauli-X/Hadamard/Rotation 是三种基本单量子比特门
- ✓ CNOT门是构建量子纠缠的核心，是两量子比特门
- ✓ VQC = 数据编码 → 变分线路 → 测量 三步构成
- ✓ 参数偏移法则用于计算量子梯度，替代经典反向传播

延伸阅读

📖 郭国平. 量子机器学习理论与实战. 人民邮电出版社, 2024.

📖 Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge, 2010.

📖 Mitarai et al. Quantum Circuit Learning. Phys. Rev. A 98, 032309 (2018).

感谢聆听

第3讲 · 量子门与量子线路